

Zum Lorenz Modell deterministischer, nichtperiodischer Strömung

INGO TESSMANN

15. April 1990

Zusammenfassung

Ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen wird die Herleitung des Lorenz Modells referiert und an einem konkreten Beispiel plausibel gemacht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Konvektionsgleichungen	2
3	Lorenz-Modell	3
3.1	Die Lorenz-Gleichungen der Konvektion	3
3.2	Zeitentwicklung und Zustandsebene des Lorenz-Modells	4
3.3	Die physikalische Realisierbarkeit des Lorenz-Modells	5
3.4	Sensitivität der Trajektorien	6
4	Literaturliste	7

1 Einleitung

In Verbindung mit dem **Problem der Wettervorhersage** hat Lorenz (1963) nichtperiodische Lösungen deterministischer Gleichungen eines hydrodynamischen Modells der **Benard-Konvektion** untersucht. Im Anschluß an Saltzman (1962) geht er von Konvektionsgleichungen aus, die unter den Voraussetzungen der Inkompressibilität und der „Boussineq-Approximation“ aus den Navier-Stokes-Gleichungen (Impuls), der Wärme-Diffusionsgleichung (Energie) und der Kontinuitätsgleichung (Masse) folgen (Swinney, Gollub 1985; Haken 1975; Mc Laughlin, Martin 1975).

2 Konvektionsgleichungen

Die **Navier-Stokes-Gleichungen** der Beschleunigungskräfte folgen aus der Summe der Druck-, Gravitations- und Reibungskräfte:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (1.1)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_o} g + \nu \nabla^2 w. \quad (1.2)$$

Gemäß Geometrie der Benard-Konvektionsschicht in der vertikalen x-z-Ebene bezeichnen u,w in $\mathbf{u} = (u,w) = (dx/dt, dz/dt)$ die horizontale und vertikale Geschwindigkeitskomponente. P steht für den Druck, ρ für die Dichte; während g die Erdbeschleunigung und ν die kinematische Viskosität symbolisieren. Die **Reibungskraft** folgt dabei aus der Newton'schen Annahme eines zum Geschwindigkeits-Gradienten proportionalen Reibungsdruckes P_R :

$$P_{Rx} = -\rho_o \nu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nach **Boussineq** ist außer in Verbindung mit g die Dichte als $\rho_o = const.$ vorausgesetzt. Sonst wird zwischen der Dichte ρ und der Temperatur $\Delta T = T_o - T$ ein linearer Zusammenhang angenommen, formuliert in der **Zustandsgleichung**:

$$\rho = \rho_o(1 - \alpha \Delta T); \quad (1.3)$$

mit α als Wärmedehnungs-Koeffizienten. Wird für die „**Dissipationsrate**“ dQ_f/dt ein linearer Diffusionsterm angesetzt, folgt aus dem **1.Hauptsatz**:

$$dQ_f = T dS = dQ + p dV$$

folgende **Wärmetransport-Gleichung**:

$$\frac{d}{dt} \Delta T = \frac{\partial}{\partial t} \Delta T + u \frac{\partial}{\partial x} \Delta T + w \frac{\partial}{\partial z} \Delta T = \kappa \nabla^2 (\Delta T), \quad (1.4)$$

wenn κ den Wärmeleitungs-Koeffizienten bezeichnet. Die **Kontinuitätsgleichung** reduziert sich für eine inkompressible Flüssigkeit auf:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

Die „**gestörten Lösungen**“ $(\rho, P, \Delta T)(x, z, t)$ der Glchn.(1.1-1.5) sind als Summen aus Ruhelösungen $f(z)$ bei reiner **Wärmeleitung** und Abweichungen $(\rho, p, \vartheta)(x, z, t)$ durch **Konvektion** darstellbar:

$$\rho = \rho_o(1 + \alpha \beta z) + \rho(x, z, t), \quad (2.1)$$

$$\Delta T = T_o - T = -\beta z + \vartheta(x, z, t), \quad (2.2)$$

$$P = P_o - \rho_o g \left(z + \frac{1}{2} \alpha \beta z^2 \right) + p(x, z, t), \quad (2.3)$$

wobei $\beta = (T_o - T_1)/H = \Delta T_o/H$ gilt und H die Konvektionsschichtdicke bezeichnet. Unter Einführung einer **Stromfunktion** $\psi(x, z, t)$ als Funktion der Stromlinien in der vertikalen x-z-Ebene durch: $\mathbf{u} = (u,w) = (-\frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial x})$ mit $\nabla^2 \psi = \nabla \times \mathbf{u}$ als „vorticity“ (Wirbelstärke), folgen

die von Lorenz an den Anfang seiner Untersuchungen gestellten **Gleichungen der Benard-Konvektion** (Saltzman 1962) zu:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} = \sigma\nabla^4\psi + \sigma\frac{\partial\vartheta}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, z)} = R\frac{\partial\psi}{\partial x} + \nabla^2\vartheta, \quad (3.2)$$

wenn zu dimensionslosen Größen übergegangen wird: $x \rightarrow x/H, z \rightarrow z/H, t \rightarrow t\kappa/H^2, \psi \rightarrow \psi/\kappa, \vartheta \rightarrow \vartheta g\alpha H^3/(\kappa\nu)$; sowie $\sigma = \nu/\kappa$ die Prandtl-Zahl, $R = g\alpha H^3\Delta T_o/(\nu\kappa)$ die Rayleigh-Zahl symbolisieren und die übliche Abkürzung für die Funktional-Determinante verwendet wird.

3 Lorenz-Modell

3.1 Die Lorenz-Gleichungen der Konvektion

Nach Rayleight können als stationäre Lösungen des Eigenwertproblems der linearisierten Gleichungen (3.1,3.2) mit den Randbedingungen $\psi, \nabla^2\psi = 0$ für $z=0, H$ bei $R \geq R_c = 27\pi^4/4 = \pi^4(1+a^2)^3/a^2$ Lösungen folgender Form angenommen werden:

$$\psi(x, z, t) = \psi_o(t)\sin(\pi ax)\sin(\pi z),$$

$$\vartheta(x, z, t) = \vartheta_o(t)\cos(\pi ax)\sin(\pi z),$$

wobei für $R = R_c : a = 1/\sqrt{2}$ wird. Die Behandlung „freier“ konvektiver Bewegung als einfaches **Anfangswertproblem**, legt somit nachstehende Fourierreihen-Entwicklung der Stromfunktion ψ und der Temperaturabweichung ϑ bzgl. der Wellenlängen $L, 2H$ in x, z -Richtung nahe (Saltzman 1962):

$$\psi(x, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi(m, n, t)\exp\left(2\pi Hi\left(\frac{m}{L}x + \frac{n}{2H}z\right)\right), \quad (4.1)$$

$$\vartheta(x, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(m, n, t)\exp\left(2\pi Hi\left(\frac{m}{L}x + \frac{n}{2H}z\right)\right). \quad (4.2)$$

Unter Berücksichtigung von Wellenzahlen $m \leq 6, n \leq 2$ erhält Saltzman durch Einsetzen und Auswerten von (4.1,4.2) in (3.1,3.2) ein System von 52 gewöhnlichen Dglen. 1. Ordng. für die entsprechenden Fourierkomponenten. Bzgl. kleiner Störungen löst er davon ein System von sieben Glchgn. Bemerkenswerterweise tendieren vier der Komponenten bei nichtperiodischen Lösungen gegen Null, so daß **Lorenz** (1963) auf der Suche nach einem sowohl einfachen wie reichhaltigen Modell konvektiver Bewegung hinsichtlich der Existenz nichtperiodischer Lösungen drei „wesentliche“ Glchgn. erhält mit dem **Ansatz**:

$$\psi(x, z, t) = \frac{\kappa(1+a^2)\sqrt{2}}{a}X(t)\sin(\pi ax)\sin(\pi z), \quad (5.1)$$

$$\vartheta(x, z, t) = \frac{\Delta T_o R_c}{\pi R}\left(\sqrt{2}Y(t)\cos(\pi ax)\sin(\pi z) - Z(t)\sin(2\pi z)\right). \quad (5.2)$$

Mit $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ und $\Theta = \Theta_1 + i\Theta_2$ entsprechen die Lorenz-Variablen X, Y, Z in den Entwicklungen (4.1,4.2) den Komponenten $\Psi_1(3, 1), \Theta_2(3, 1), \Theta_2(0, 2)$. Eingesetzt in (3.1,3.2) folgen für die Fourierkomponenten (X, Y, Z) (τ) die **Lorenz-Gleichungen der Konvektion**:

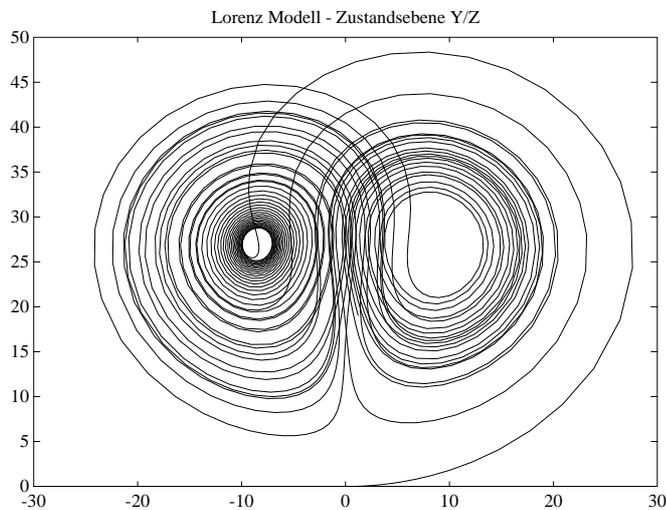
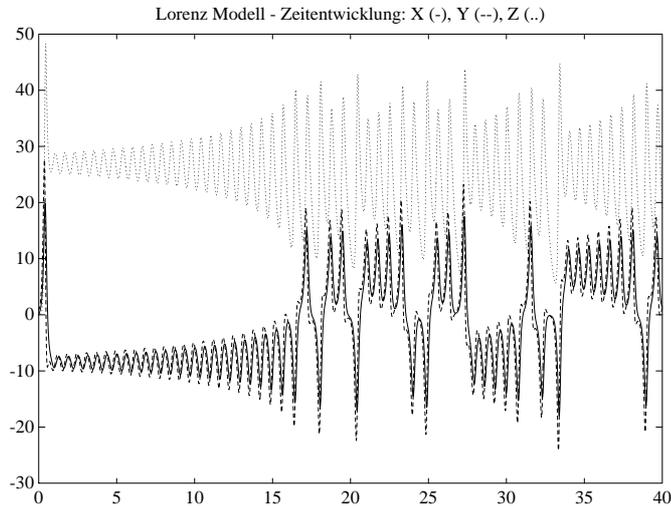
$$\frac{dX}{d\tau} = -\sigma X + \sigma Y, \quad (5.3)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y, \quad (5.4)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ, \quad (5.5)$$

wobei $\tau = \pi^2(1 + a^2)t$, $r = R/R_c$, $\sigma = \nu/\kappa$ und $b = 4/(1 + a^2)$. Hinsichtlich ihrer physikalischen Bedeutung soll nach Lorenz X der Stärke konvektiver Bewegung proportional sein, Z ein Maß der Abweichung vom linearen vertikalen Temperaturprofil und Y proportional zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigenden und abfallenden Strömungen sein. Für „nicht zu großes r “ sollen die Glchn. (5.3-5.5) ein realistisches Modell konvektiver Bewegung darstellen.

3.2 Zeitentwicklung und Zustandsebene des Lorenz-Modells



Modell Parameter: $b = 8/3$, $r = 28$, $s = 10$

3.3 Die physikalische Realisierbarkeit des Lorenz-Modells

Ein von Malkus am M.I.T. konstruierter „**Wasserreifen**“ (Lorenz 1979) ist um eine horizontale Achse frei drehbar und besteht aus einem konzentrischen Ring kleiner undichter Behälter, denen von oben Wasser zugeführt werden kann. Wird der Zufluß proportional zur Höhe $H = R(1 + \sin\phi)$ und der Abfluß proportional zur Bogen-Dichte $\varrho = dm/ds$ angenommen, folgt aus **Massenerhaltung**:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \omega \frac{\partial\varrho}{\partial\phi} = A + 2B\sin\phi - h\varrho, \quad (6.1)$$

wenn R den Ringradius, $\omega = d\phi/dt$ die Winkelgeschwindigkeit und A, B, h positive Konstanten bezeichnen. Da (6.1) asymptotisch gegen $\varrho(t \rightarrow \infty) = A/h$ strebt, werde als Bogen-Dichtemittel spez. $\langle\varrho\rangle = A/h$ gesetzt. Mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung folgt aus **Drehimpulserhaltung** die Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{R\langle\varrho\rangle} \langle\varrho\cos\phi\rangle - k\omega, \quad (6.2)$$

wenn k die Dämpfungskonstante und $gR\langle\varrho\cos\phi\rangle$ die winkelgemittelte Tangentialkraft bezeichnen. Werden die winkelgemittelte **Tangential- und Normalkraft** wie folgt abgekürzt:

$$\langle F_T \rangle_\phi = gR\langle\varrho\cos\phi\rangle = gR\langle f_T \rangle,$$

$$\langle F_N \rangle_\phi = gR\langle\varrho\sin\phi\rangle = gR\langle f_N \rangle,$$

dann folgen aus (6.1) die **Kraftgleichungen**:

$$\frac{d}{dt} \langle f_T \rangle = -\omega \langle f_N \rangle - h \langle f_T \rangle, \quad (6.3)$$

$$\frac{d}{dt} \langle f_N \rangle = \omega \langle f_T \rangle - h \langle f_N \rangle + B. \quad (6.4)$$

Werden die **Lorenz-Glchgn.** (5.3-5.5) passend linear **transformiert** gemäß : $u = X, v = Y, w = r - Z$, so daß gilt:

$$\frac{du}{d\tau} = -\sigma u + \sigma v,$$

$$\frac{dv}{d\tau} = uv - v,$$

$$\frac{dw}{d\tau} = b(r - w) - uv;$$

dann ergeben sich zwischen den **Lorenz-Variablen** X, Y, Z und den Kräften und der Winkelgeschwindigkeit des „**Wasserreifens**“ folgende Beziehungen: $X = -\omega/h, Y = \langle f_T \rangle h, Z = r - h \langle f_N \rangle$ sowie $b = 1, r = B, \sigma = \sqrt{gk/R\langle\varrho\rangle}$.

3.4 Sensitivität der Trajektorien

Mit geeigneter Transformation können die **Lorenz-Gleichungen** (5.3-5.5) mit $w' = w - 1$ in folgende Form gebracht werden (Haken 1978):

$$\frac{du}{d\tau} = -\alpha u + v, \quad (7.1)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -\gamma v + uw', \quad (7.2)$$

$$\frac{dw'}{d\tau} = w'_o - w' - uv. \quad (7.3)$$

Aus ihrem Zusammenhang mit der **Laser-Physik** gelangt Haken zu einer **Interpretation** der Terme und des Attraktors, die das quasi „zufällige Springen“ der zeitlichen Lösungskurven zwischen den entsprechenden Zustandsraum-Bereichen verständlich zu machen sucht (Haken 1977,1978). So entspringen die jeweils ersten Terme der rechten Seiten der Glchgn.(7.1-7.3) dämpfenden und treibenden Kräften aufgrund irreversibler Kopplungen, während die zweiten Terme „**kohärenten Wechselwirkungen**“ zuzuschreiben sind, für die folgende **Erhaltungsgrößen** gelten:

$$K^2 = u^2 + v^2 + w^2; L^2 = v^2 + (w - 1)^2.$$

Demnach verlaufen die „kohärenten Trajektorien“ auf den Schnittkanten der Kugel- und Zylinderfläche in jeweils getrennten Raumbereichen, wenn $K > 1 + L$, oder aber es entsteht eine geschlossene Trajektorie in einem Raumbereich, wenn $K < 1 + L$. Unter dem **Einfluß dämpfender und treibender Kräfte** führen nunmehr K und L „Pulsationen“ derart zwischen diesen beiden Bewegungsformen aus, daß es im „raumverbindenden Grenzbereich“ extrem empfindlich vom momentanen Wert der Trajektorie abhängt, ob sie in den einen oder anderen Bereich „springt“ und dort weiterverläuft...

4 Literaturliste

1. H. Haken, Cooperative phenomena in systems far from equilibrium and in nonphysical systems, *Rev. Mod. Phys.* 47 (1975) 67–121, spec. 89–91
2. H. Haken, *Synergetics*, Bln. 1978, p. 320–329
3. H. Haken, A. Wunderlin, New interpretation and size of strange attractor of the Lorenz model of turbulence, *Phys. Lett.* 62A (1977) 133–134
4. E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 130–141
5. E. N. Lorenz, On the prevalence of aperiodicity in simple systems, in: M. Germela, J. E. Marsden, *Global Analysis*, Bln. 1979, p. 53–75.
6. J. B. Mc Laughlin, P. C. Martin, Transition to turbulence in a statistically stressed fluid system, *Phys. Rev. A* 12 (1975) 186–203
7. B. Saltzman, Finite amplitude free convection as an initial value problem - I, *J. Atmos. Sci.* 19 (1962) 329–341
8. H. L. Swinney, J. P. Gollub (Ed.), *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Bln. 1985 (1981), p. 27ff.