

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding



in natürlichen und technischen Systemen

Dr. rer. nat. Michael Schanz

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - ...

Zusammenfassung ...



1. Motivation

Selbstorganisation ist

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



1. Motivation

Selbstorganisation ist

- ▶ eine Form der **Organisation**, bei der die **formgebenden** bzw. **strukturbildenden** beschränkenden Einflüsse von den **Elementen** des sich organisierenden Systems **selbst** ausgehen

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



1. Motivation

Selbstorganisation ist

- ▶ eine Form der **Organisation**, bei der die **formgebenden** bzw. **strukturbildenden** beschränkenden Einflüsse von den **Elementen** des sich organisierenden Systems **selbst** ausgehen
- ▶ ein Prozess, bei dem der interne **Organisationsgrad** eines Systems spontan zunimmt, ohne dass dies von der Umgebung oder einem anderen externen System kontrolliert wird



1. Motivation

Selbstorganisation ist

- ▶ eine Form der **Organisation**, bei der die **formgebenden** bzw. **strukturbildenden** beschränkenden Einflüsse von den **Elementen** des sich organisierenden Systems **selbst** ausgehen
- ▶ ein Prozess, bei dem der interne **Organisationsgrad** eines Systems spontan zunimmt, ohne dass dies von der Umgebung oder einem anderen externen System kontrolliert wird
- ▶ das **spontane Auftreten** neuer, stabiler, hoch effizienter, **Strukturen** oder **Verhaltensweisen** in offenen Systemen, also fern vom Gleichgewicht, wobei die **interagierenden** Teilnehmer nach **einfachen Regeln** handeln und dabei aus Chaos Ordnung schaffen, ohne eine Vision von der gesamten Entwicklung haben zu müssen



University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

Eigenschaften selbstorganisierender Systeme

Motivation

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



► Offenheit

Es findet ein Durchfluss von Energie, Materie oder Information statt

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .



► **Offenheit**

Es findet ein Durchfluss von Energie, Materie oder Information statt

► **Zusammengesetztheit**

Sie sind typischerweise zusammengesetzt aus vielen, miteinander wechselwirkenden Untersystemen



- ▶ **Offenheit**
Es findet ein Durchfluss von Energie, Materie oder Information statt
- ▶ **Zusammengesetztheit**
Sie sind typischerweise zusammengesetzt aus vielen, miteinander wechselwirkenden Untersystemen
- ▶ **Nichtlinearität**
Die Untersysteme oder die Wechselwirkungen enthalten Nichtlinearitäten



- ▶ **Offenheit**
Es findet ein Durchfluss von Energie, Materie oder Information statt
- ▶ **Zusammengesetztheit**
Sie sind typischerweise zusammengesetzt aus vielen, miteinander wechselwirkenden Untersystemen
- ▶ **Nichtlinearität**
Die Untersysteme oder die Wechselwirkungen enthalten Nichtlinearitäten



Emergenz:

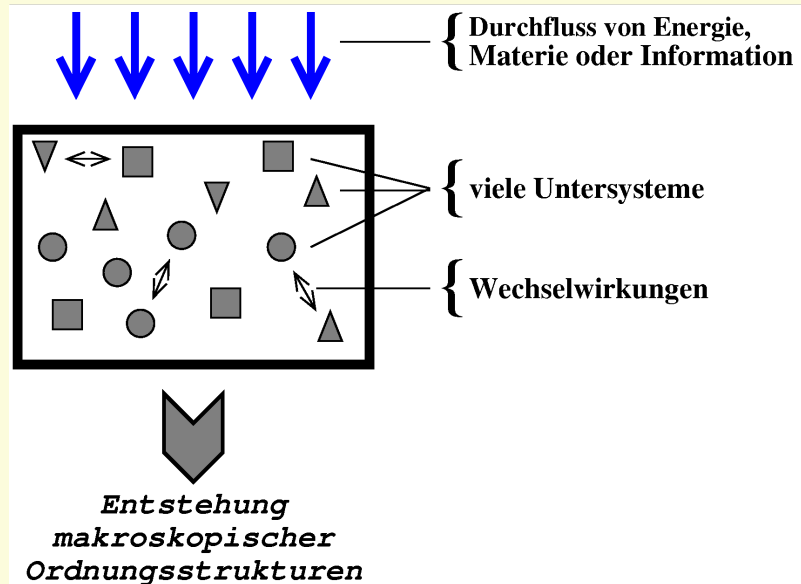
Es können spontan **Ordnungsstrukturen** entstehen

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION



Wichtig: Die Zufuhr von Energie, Materie oder Information ist dabei unspezifisch und stellt daher keine äußere Kontrolle dar



University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding



- **zeitliche Strukturbildung**
Entstehung dynamischer räumlich homogener Strukturen
Bsp.: Farbänderungen oszillierenden chemischen Reaktionen, Populationsdynamik

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



► **zeitliche Strukturbildung**

Entstehung dynamischer räumlich homogener Strukturen

Bsp.: Farbänderungen oszillierenden chemischen Reaktionen, Populationsdynamik

► **räumliche Strukturbildung**

Entstehung stationärer räumlicher Strukturen

Bsp.: Konvektionszellen (Roller oder Hexagone) beim Bénard Experiment, Fellmuster



- ▶ **zeitliche Strukturbildung**
Entstehung dynamischer räumlich homogener Strukturen
Bsp.: Farbänderungen oszillierenden chemischen Reaktionen, Populationsdynamik
- ▶ **räumliche Strukturbildung**
Entstehung stationärer räumlicher Strukturen
Bsp.: Konvektionszellen (Rollen oder Hexagone) beim Bénard Experiment, Fellmuster
- ▶ **raum-zeitliche Strukturbildung**
Entstehung dynamischer räumlicher Strukturen
Bsp.: Raumzeitliche Muster der BZ-Reaktion



- ▶ **zeitliche Strukturbildung**
Entstehung dynamischer räumlich homogener Strukturen
Bsp.: Farbänderungen oszillierender chemischen Reaktionen, Populationsdynamik
- ▶ **räumliche Strukturbildung**
Entstehung stationärer räumlicher Strukturen
Bsp.: Konvektionszellen (Rollen oder Hexagone) beim Bénard Experiment, Fellmuster
- ▶ **raum-zeitliche Strukturbildung**
Entstehung dynamischer räumlicher Strukturen
Bsp.: Raumzeitliche Muster der BZ-Reaktion
- ▶ **funktionale Strukturbildung**
Entstehung funktionaler Strukturen
Bsp.: Bewegungsmuster, Gangarten bei Pferden



► 19. Jahrhundert **Volta**, ...

Vereinzelte Berichte über die Beobachtung oszillierender chemischer Reaktionen wurden als **Laborartefakte** abgetan

Motivation

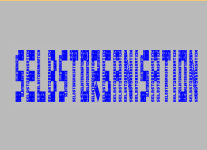
Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



- ▶ 19. Jahrhundert **Volta, ...**
Vereinzelte Berichte über die Beobachtung oszillierender chemischer Reaktionen wurden als **Laborartefakte** abgetan
- ▶ 1900 **Bénard**
Entdeckung des Auftretens von Konvektionsströmungen mit räumlicher Musterbildung



► 19. Jahrhundert **Volta, ...**

Vereinzelte Berichte über die Beobachtung oszillierender chemischer Reaktionen wurden als **Laborartefakte** abgetan

► 1900 **Bénard**

Entdeckung des Auftretens von Konvektionsströmungen mit räumlicher Musterbildung

► 1959 **Belousov**

Erster wissenschaftlicher Artikel über eine oszillierende chemische Reaktion wurde zunächst **mehrfach abgelehnt** wegen Unvereinbarkeit mit dem 2. Hauptsatz der Thermo-

dynamik $\frac{dS}{dt} \geq 0$



► 19. Jahrhundert **Volta, ...**

Vereinzelte Berichte über die Beobachtung oszillierender chemischer Reaktionen wurden als **Laborartefakte** abgetan

► 1900 **Bénard**

Entdeckung des Auftretens von Konvektionsströmungen mit räumlicher Musterbildung

► 1959 **Belousov**

Erster wissenschaftlicher Artikel über eine oszillierende chemische Reaktion wurde zunächst **mehrfach abgelehnt** wegen Unvereinbarkeit mit dem 2. Hauptsatz der Thermo-

$$\text{dynamik } \frac{dS}{dt} \geq 0$$

► 1960 - 1965 **Zhabotinsky**

systematische Untersuchungen der Reaktion von Belousov führt zum Namen Belousov-Zhabotinsky Reaktion



► 19. Jahrhundert **Volta, ...**

Vereinzelte Berichte über die Beobachtung oszillierender chemischer Reaktionen wurden als **Laborartefakte** abgetan

► 1900 **Bénard**

Entdeckung des Auftretens von Konvektionsströmungen mit räumlicher Musterbildung

► 1959 **Belousov**

Erster wissenschaftlicher Artikel über eine oszillierende chemische Reaktion wurde zunächst **mehrfach abgelehnt** wegen Unvereinbarkeit mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\frac{dS}{dt} \geq 0$$

► 1960 - 1965 **Zhabotinsky**

systematische Untersuchungen der Reaktion von Belousov führt zum Namen Belousov-Zhabotinsky Reaktion

► 1968 - 1975 **Prigogine und Nicolis**

Modifikation des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_i}{dt} + \frac{dS_e}{dt} \geq 0$$



► 19. Jahrhundert **Volta, ...**

Vereinzelte Berichte über die Beobachtung oszillierender chemischer Reaktionen wurden als **Laborartefakte** abgetan

► 1900 **Bénard**

Entdeckung des Auftretens von Konvektionsströmungen mit räumlicher Musterbildung

► 1959 **Belousov**

Erster wissenschaftlicher Artikel über eine oszillierende chemische Reaktion wurde zunächst **mehrfach abgelehnt** wegen Unvereinbarkeit mit dem 2. Hauptsatz der Thermo-

$$\text{dynamik } \frac{dS}{dt} \geq 0$$

► 1960 - 1965 **Zhabotinsky**

systematische Untersuchungen der Reaktion von Belousov führt zum Namen Belousov-Zhabotinsky Reaktion

► 1968 - 1975 **Prigogine und Nicolis**

Modifikation des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_i}{dt} + \frac{dS_e}{dt} \geq 0$$

► 1968 - 1975 **Haken**

Entwicklung der **Synergetik**



Beim dem nach Henri Bénard benannten Experiment wird eine Flüssigkeitsschicht von der Unterseite erhitzt, während die Oberseite auf einer niedrigeren Temperatur gehalten wird.

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



Beim dem nach Henri Bénard benannten Experiment wird eine Flüssigkeitsschicht von der Unterseite erhitzt, während die Oberseite auf einer niedrigeren Temperatur gehalten wird.

- ▶ Temperaturdifferenz $\Delta T < \Delta T_{\text{krit}}$
 $\Rightarrow$ Wärmeleitung, räumlich homogener Zustand

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



Beim dem nach Henri Bénard benannten Experiment wird eine Flüssigkeitsschicht von der Unterseite erhitzt, während die Oberseite auf einer niedrigeren Temperatur gehalten wird.

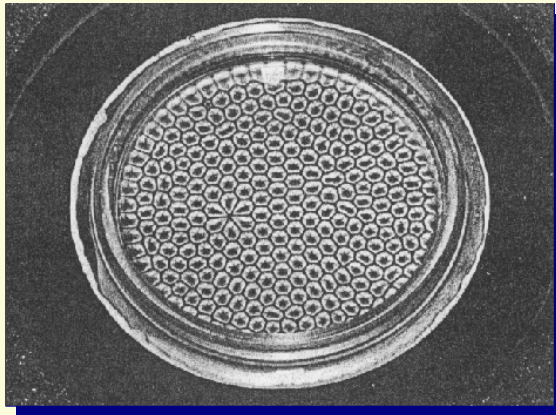
- ▶ Temperaturdifferenz $\Delta T < \Delta T_{\text{krit}}$
⇒ Wärmeleitung, räumlich homogener Zustand
- ▶ Temperaturdifferenz $\Delta T > \Delta T_{\text{krit}}$
⇒ Konvektionsströmung, räumlich inhomogener Zustand

*Motivation**Beispiele**Haken-Zwanzig**Selektionsgleichungen**Einfache Regeln - . . .**Zusammenfassung . . .*

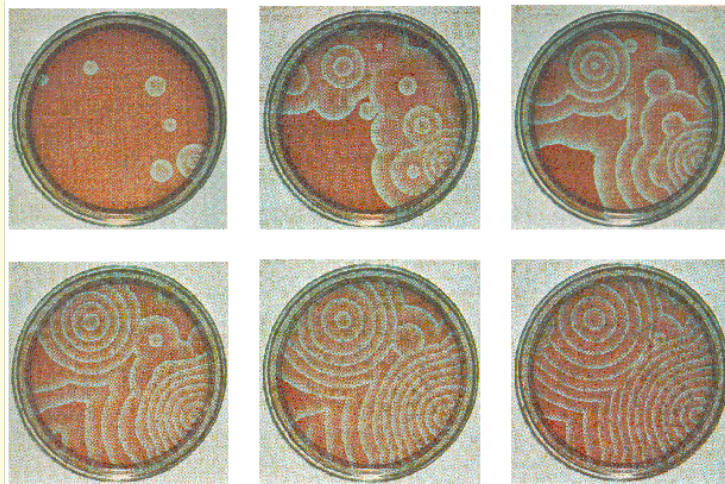


Beim dem nach Henri Bénard benannten Experiment wird eine Flüssigkeitsschicht von der Unterseite erhitzt, während die Oberseite auf einer niedrigeren Temperatur gehalten wird.

- ▶ Temperaturdifferenz $\Delta T < \Delta T_{\text{krit}}$
⇒ Wärmeleitung, räumlich homogener Zustand
- ▶ Temperaturdifferenz $\Delta T > \Delta T_{\text{krit}}$
⇒ Konvektionsströmung, räumlich inhomogener Zustand



Die Belousov-Zhabotinsky Reaktion ist das erste wissenschaftlich dokumentierte Beispiel für einen chemischen Oszillator. Die Reaktion findet in einem sogenannten erregbaren Medium statt und kann je nach Durchführung des Experiments zeitliche oder raum-zeitliche Strukturen bilden.



1.) Far, far, far away

Beispiele

2. Beispiele

Galaxy Cluster Abell 2218 wirkt als Gravitationslinse



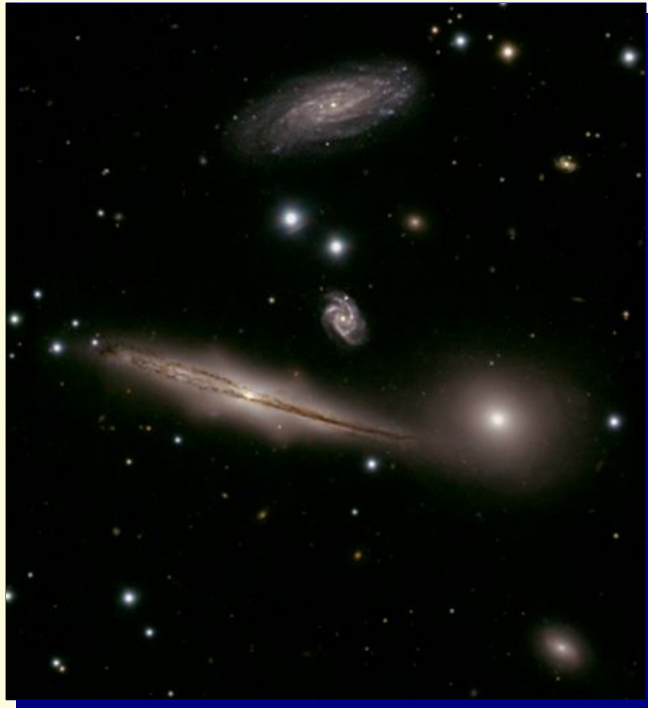
Entdeckung der entferntesten Galaxie (Stand: 16.02.2004)



2.) Far, far away

Beispiele

Galaxiengruppe



3.) Far, far away

Beispiele

Spiralgalaxie M74



4.) Far, far away

Beispiele

Ringnebel



4.) Far, far away

Beispiele

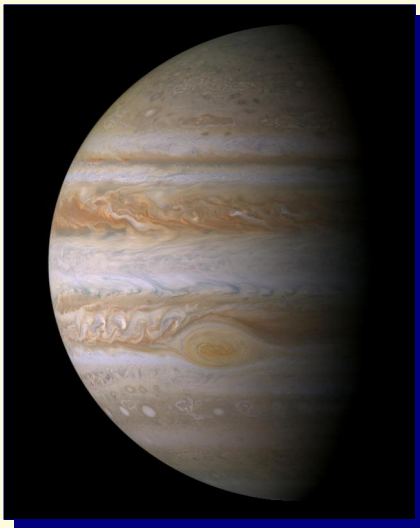
Ringnebel



5.) Far away

Beispiele

Jupiter: Großer Roter Fleck



Saturn: Ringe



University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .





► Plattentektonik

6.) Der Blaue Planet

Beispiele



- ▶ Plattentektonik
- ▶ Dynamik des Erdmagnetfeldes

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



- ▶ Plattentektonik
- ▶ Dynamik des Erdmagnetfeldes
- ▶ Wolkenmuster

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

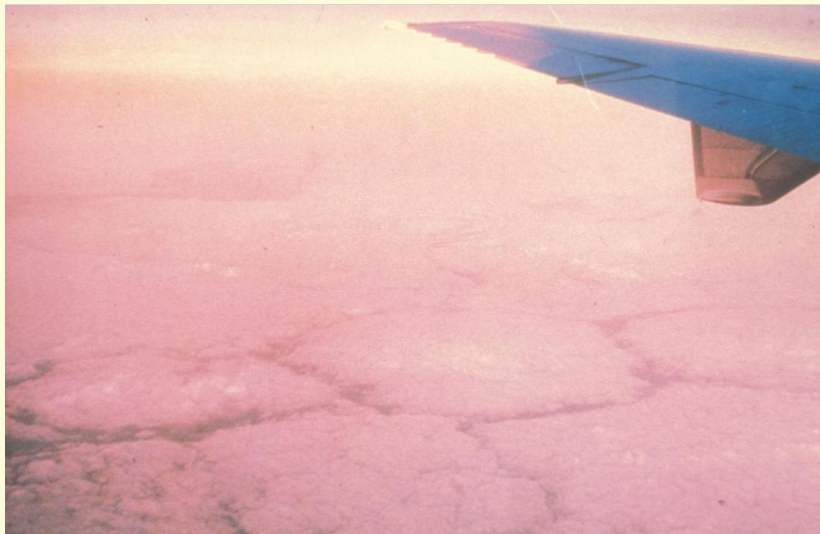
Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



- ▶ Plattentektonik
- ▶ Dynamik des Erdmagnetfeldes
- ▶ Wolkenmuster
- ▶ ...



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



8.) Basalthexagone

Giants Causeway (North Ireland)



8.) Basalthexagone

Beispiele

Giants Causeway (North Ireland)

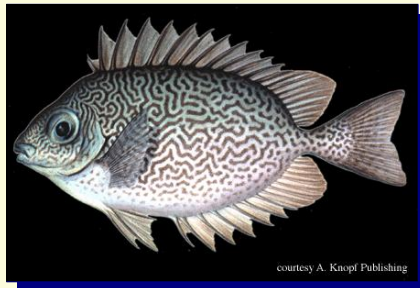


Devil's Postpile (California)



9.) Muster im Tierreich I

Beispiele



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

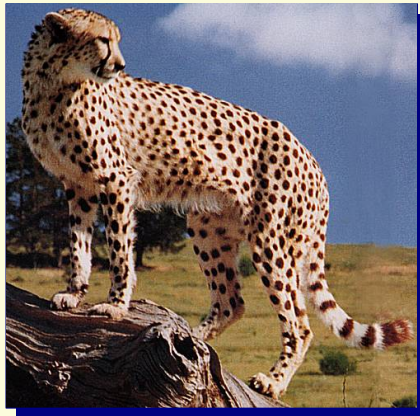
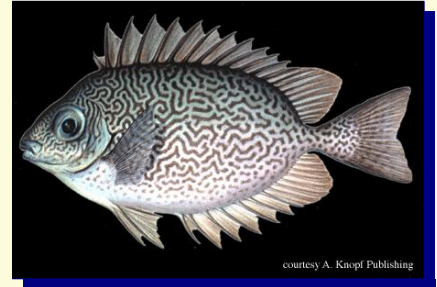
Zusammenfassung . . .

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

Schwarmverhalten



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



SELBSTORGANISATION

12.) Muster im Pflanzenreich I

Beispiele



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

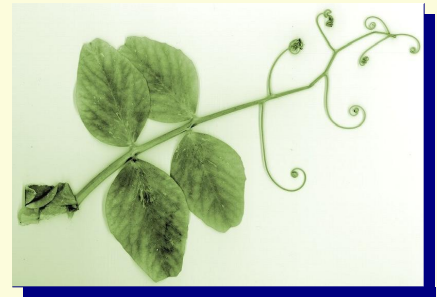
Zusammenfassung . . .

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

SELF-ORGANIZATION

System oder Systemklasse	Disziplin	Untersysteme	Makroskopische Ordnungsstruktur
Laser	Physik	Atome	Laserlicht
BZ-Reaktion	Chemie	Moleküle	Farbänderungen Spiralmuster
Bénard-Experiment	Hydrodynamik	Moleküle	Hexagonmuster Rollenmuster
Populations- systeme	Ökologie	Spezies	Oszillationen
morphogenetische Systeme	Biologie	Zellen	funktionales Zellaggregat
Herzmuskel	Physiologie	Zellen	Pumpbewegung
Wolken	Meteorologie	Wassermoleküle	Wolkenstraßen
Galaxie	Kosmologie	Sterne	Spiralmuster Strings
Gesellschaft	Soziologie	Menschen	Zeitgeist
MAS	Informatik	Agenten	Interaktions- muster

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

Mithilfe von Reaktions-Diffusions Gleichungen ist es möglich, die Muster bestimmter Muscheln, sowie bestimmte Fellmuster nachzubilden.



Eine mathematische Beschreibung aller Selbstorganisationsprozesse ist wünschenswert!

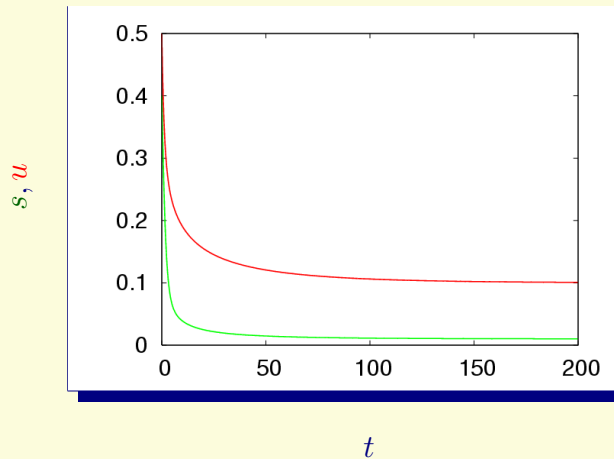
3. Das Haken-Zwanzig System

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)s(t) \quad \text{instabile Mode}$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + u(t)^2 \quad \text{stabile Mode}$$

$$\epsilon \ll 1 \Rightarrow \text{Zeitskalentrennung}$$

Numerische Lösung für $\epsilon = 0.01$ und $u(0) = 0.5$, $s(0) = 0.4$:



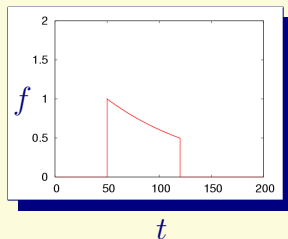
University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

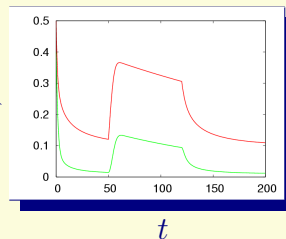
Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

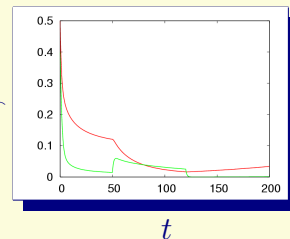
einfache Störung



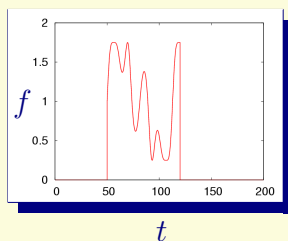
...angewandt auf u



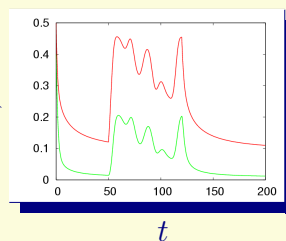
...angewandt auf s



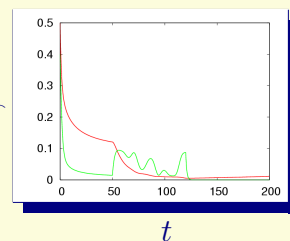
komplizierte Störung



...angewandt auf u



...angewandt auf s



Die instabile Mode u ist die relevante dynamische Größe



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

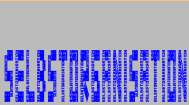
Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

Konsequenzen der Zeitskalentrennung:

Konsequenzen der Zeitskalentrennung:

⇒ schnelle intrinsische Dynamik der stabilen Mode s



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

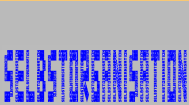
Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

Konsequenzen der Zeitskalentrennung:

⇒ schnelle intrinsische Dynamik der **stabilen Mode s**

⇒ **stabile Mode s** folgt der **instabilen Mode u** instantan



Konsequenzen der Zeitskalentrennung:

- ⇒ schnelle intrinsische Dynamik der **stabilen Mode s**
- ⇒ **stabile Mode s** folgt der **instabilen Mode u** instantan
- ⇒ **stabile Mode s** ist bestimmt durch eine Funktion $h(u)$

Motivation

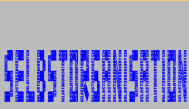
Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

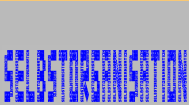
Zusammenfassung . . .



Konsequenzen der Zeitskalentrennung:

- ⇒ schnelle intrinsische Dynamik der stabilen Mode s
- ⇒ stabile Mode s folgt der instabilen Mode u instantan
- ⇒ stabile Mode s ist bestimmt durch eine Funktion $h(u)$

Die zentrale Mannigfaltigkeit $h(u)$ lässt sich approximieren durch:



Konsequenzen der Zeitskalentrennung:

- ⇒ schnelle intrinsische Dynamik der **stabilen Mode s**
- ⇒ **stabile Mode s** folgt der **instabilen Mode u** instantan
- ⇒ **stabile Mode s** ist bestimmt durch eine Funktion $h(u)$

Die **zentrale Mannigfaltigkeit $h(u)$** lässt sich approximieren durch:

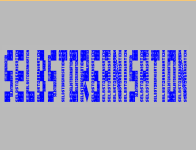
- stringente Entwicklung nach dem Kleinheitsparameter ϵ

Konsequenzen der Zeitskalentrennung:

- ⇒ schnelle intrinsische Dynamik der **stabilen Mode s**
- ⇒ **stabile Mode s** folgt der **instabilen Mode u** instantan
- ⇒ **stabile Mode s** ist bestimmt durch eine Funktion $h(u)$

Die **zentrale Mannigfaltigkeit $h(u)$** lässt sich approximieren durch:

- ▶ stringente Entwicklung nach dem Kleinheitsparameter ϵ
- ▶ **adiabatische Elimination**



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

adiabatische Elimination:



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

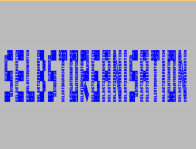
Zusammenfassung . . .

adiabatische Elimination:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + u(t)^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$s(t) = h(u(t)) = u(t)^2$$



adiabatische Elimination:

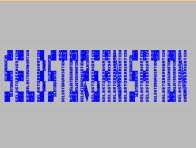
$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + u(t)^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$s(t) = h(u(t)) = u(t)^2$$

eingesetzt in

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)s(t)$$



adiabatische Elimination:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + u(t)^2 = 0$$

$\Downarrow$

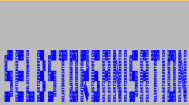
$$s(t) = h(u(t)) = u(t)^2$$

eingesetzt in

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)s(t)$$

liefert die **Ordnungsparametergleichung (OPGL)**:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)^3 = -\frac{\partial}{\partial u}V(\epsilon, u)$$



adiabatische Elimination:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + u(t)^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$s(t) = h(u(t)) = u(t)^2$$

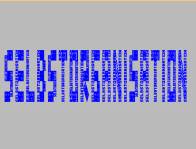
eingesetzt in

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)s(t)$$

liefert die **Ordnungsparametergleichung (OPGL)**:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)^3 = -\frac{\partial}{\partial u}V(\epsilon, u)$$

Die **Ordnungsparametergleichung** hängt nicht mehr von der Größe $s(t)$ ab, sondern nur noch von der Größe $u(t)$.



adiabatische Elimination:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + u(t)^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$s(t) = h(u(t)) = u(t)^2$$

eingesetzt in

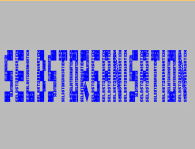
$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)s(t)$$

liefert die **Ordnungsparametergleichung (OPGL)**:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)^3 = -\frac{\partial}{\partial u}V(\epsilon, u)$$

Die **Ordnungsparametergleichung** hängt nicht mehr von der Größe $s(t)$ ab, sondern nur noch von der Größe $u(t)$.

$\Downarrow$



adiabatische Elimination:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + u(t)^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$s(t) = h(u(t)) = u(t)^2$$

eingesetzt in

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)s(t)$$

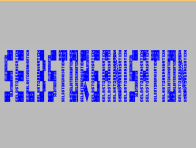
liefert die **Ordnungsparametergleichung (OPGL)**:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)^3 = -\frac{\partial}{\partial u}V(\epsilon, u)$$

Die **Ordnungsparametergleichung** hängt nicht mehr von der Größe $s(t)$ ab, sondern nur noch von der Größe $u(t)$.

$\Downarrow$

Die **instabile Mode** u bestimmt die Dynamik und ist daher der



adiabatische Elimination:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -s(t) + u(t)^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$s(t) = h(u(t)) = u(t)^2$$

eingesetzt in

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)s(t)$$

liefert die **Ordnungsparametergleichung (OPGL)**:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \epsilon u(t) - u(t)^3 = -\frac{\partial}{\partial u}V(\epsilon, u)$$

Die **Ordnungsparametergleichung** hängt nicht mehr von der Größe $s(t)$ ab, sondern nur noch von der Größe $u(t)$.

$\Downarrow$

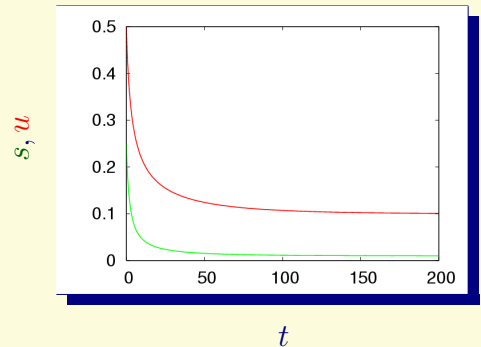
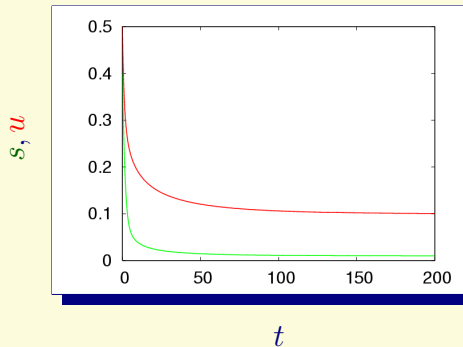
Die **instabile Mode** u bestimmt die Dynamik und ist daher der

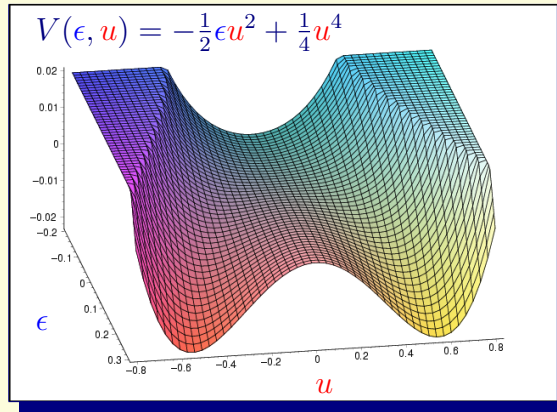
Ordnungsparameter



Numerische Lösung

- ▶ des vollständigen Systems für $\epsilon = 0.01$, $u(0) = 0.5$, $s(0) = 0.4$
- ▶ der OPGL für $\epsilon = 0.01$ und $u(0) = 0.5$





- $\epsilon < 0 \Rightarrow u = 0$ ist einziger stabiler Fixpunkt
- $\epsilon = 0 \Rightarrow u = 0$ ist einziger indifferenter Fixpunkt
- $\epsilon > 0 \Rightarrow u = 0$ ist instabiler Fixpunkt
- $u = \pm\sqrt{\epsilon}$ sind zwei neue stabile Fixpunkte



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

„Versklavungsprinzip“

Das Haken-Zwanzig System

Variation des Kontrollparameters ϵ von $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon > 0$

Variation des Kontrollparameters ϵ von $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon > 0$

- Stabile Gleichgewichtslage $u = 0$ wird instabil

Motivation

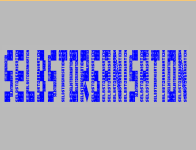
Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .



Variation des Kontrollparameters ϵ von $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon > 0$

- Stabile Gleichgewichtslage $u = 0$ wird instabil
- Fluktuationen entscheiden welche neue stabile Gleichgewichtslage ($u = \pm\sqrt{\epsilon}$) eingenommen wird



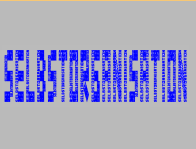
Variation des Kontrollparameters ϵ von $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon > 0$

- ▶ Stabile Gleichgewichtslage $u = 0$ wird instabil
- ▶ Fluktuationen entscheiden welche neue stabile Gleichgewichtslage ($u = \pm\sqrt{\epsilon}$) eingenommen wird
- ▶ Bifurkation



Variation des Kontrollparameters ϵ von $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon > 0$

- ▶ Stabile Gleichgewichtslage $u = 0$ wird instabil
- ▶ Fluktuationen entscheiden welche neue stabile Gleichgewichtslage ($u = \pm\sqrt{\epsilon}$) eingenommen wird
- ▶ Bifurkation
- ▶ Symmetriebrechung



Variation des Kontrollparameters ϵ von $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon > 0$

- ▶ Stabile Gleichgewichtslage $u = 0$ wird instabil
- ▶ Fluktuationen entscheiden welche neue stabile Gleichgewichtslage ($u = \pm\sqrt{\epsilon}$) eingenommen wird
- ▶ Bifurkation
- ▶ Symmetriebrechung
- ▶ In einer Umgebung der Instabilität $\epsilon = 0$ wird die Dynamik des Gesamtsystems allein durch den **Ordnungsparameter** u bestimmt



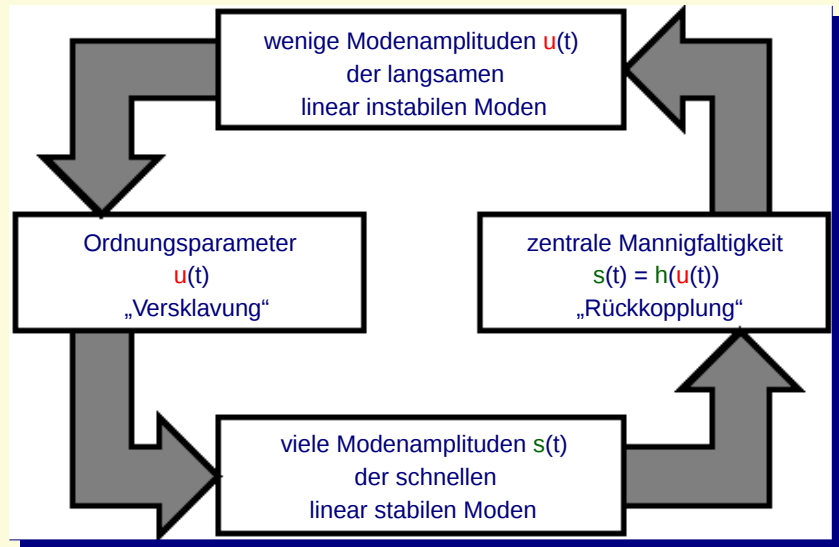
Variation des Kontrollparameters ϵ von $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon > 0$

- ▶ Stabile Gleichgewichtslage $u = 0$ wird instabil
- ▶ Fluktuationen entscheiden welche neue stabile Gleichgewichtslage ($u = \pm\sqrt{\epsilon}$) eingenommen wird
- ▶ Bifurkation
- ▶ Symmetriebrechung
- ▶ In einer Umgebung der Instabilität $\epsilon = 0$ wird die Dynamik des Gesamtsystems allein durch den **Ordnungsparameter** u bestimmt
- ▶ „Versklavungsprinzip“ der Synergetik:
Die linear stabile Mode s wird von der linear instabilen Mode u „versklavt“

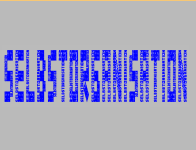


Variation des Kontrollparameters ϵ von $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon > 0$

- ▶ Stabile Gleichgewichtslage $u = 0$ wird instabil
- ▶ Fluktuationen entscheiden welche neue stabile Gleichgewichtslage ($u = \pm\sqrt{\epsilon}$) eingenommen wird
- ▶ Bifurkation
- ▶ Symmetriebrechung
- ▶ In einer Umgebung der Instabilität $\epsilon = 0$ wird die Dynamik des Gesamtsystems allein durch den **Ordnungsparameter** u bestimmt
- ▶ „Versklavungsprinzip“ der Synergetik:
Die linear stabile Mode s wird von der linear instabilen Mode u „versklavt“
- ▶ Zirkuläre Kausalität:
Die „versklavte Mode“ Mode s wirkt über die zentrale Mannigfaltigkeit h auf den Ordnungsparameter u zurück



- ▶ Die im allgemeinen wenigen **Ordnungsparameter** bestimmen die Dynamik des Gesamtsystems.
- ▶ Dies stellt eine erhebliche Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade und damit der Komplexität des Systems dar.



4. Selektionsgleichungen

Was geschieht bei mehreren **Ordnungsparametern**?

Motivation

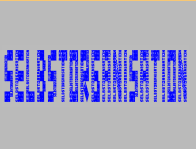
Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

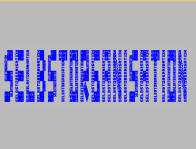
Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .

4. Selektionsgleichungen

Was geschieht bei mehreren **Ordnungsparametern**?

- Typischerweise **gekoppelte Ordnungsparametergleichungen**



4. Selektionsgleichungen

Was geschieht bei mehreren **Ordnungsparametern**?

- ▶ Typischerweise **gekoppelte Ordnungsparametergleichungen**
- ▶ **Wettbewerb der Ordnungsparameter**

Motivation

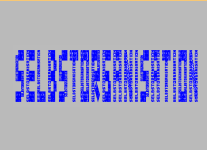
Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .

4. Selektionsgleichungen

Was geschieht bei mehreren **Ordnungsparametern**?

- ▶ Typischerweise **gekoppelte Ordnungsparametergleichungen**
- ▶ **Wettbewerb der Ordnungsparameter**
- ▶ **Ordnungsparameter mit dem größten Startwert gewinnt**



4. Selektionsgleichungen

Was geschieht bei mehreren **Ordnungsparametern**?

- ▶ Typischerweise **gekoppelte Ordnungsparametergleichungen**
- ▶ **Wettbewerb der Ordnungsparameter**
- ▶ **Ordnungsparameter mit dem größten Startwert gewinnt**
- ▶ **Selektionsprozess** mit *winner takes it all*-Verhalten



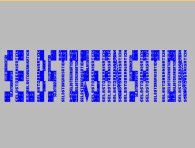
4. Selektionsgleichungen

Was geschieht bei mehreren **Ordnungsparametern**?

- ▶ Typischerweise **gekoppelte Ordnungsparametergleichungen**
- ▶ **Wettbewerb der Ordnungsparameter**
- ▶ **Ordnungsparameter mit dem größten Startwert gewinnt**
- ▶ **Selektionsprozess** mit *winner takes it all*-Verhalten

Selektionsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\xi_u(t) = \xi_u(t) - \xi_u(t)^3 - \beta \xi_u(t) \sum_{\substack{u'=1 \\ u' \neq u}}^N \xi_{u'}(t)^2 \quad (\beta > 1)$$



4. Selektionsgleichungen

Was geschieht bei mehreren **Ordnungsparametern**?

- ▶ Typischerweise **gekoppelte Ordnungsparametergleichungen**
- ▶ **Wettbewerb der Ordnungsparameter**
- ▶ **Ordnungsparameter mit dem größten Startwert gewinnt**
- ▶ **Selektionsprozess** mit *winner takes it all*-Verhalten

Selektionsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\xi_u(t) = \xi_u(t) - \xi_u(t)^3 - \beta \xi_u(t) \sum_{\substack{u'=1 \\ u' \neq u}}^N \xi_{u'}(t)^2 \quad (\beta > 1)$$

$$\frac{d}{dt}\xi_u(t) = \xi_u(t) \left(1 + (\beta_{uu} - 1) \xi_u(t)^2 - \sum_{u'=1}^N \beta_{uu'} \xi_{u'}(t)^2 \right)$$

University of Stuttgart

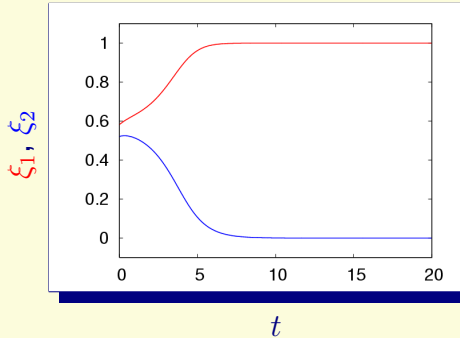
Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

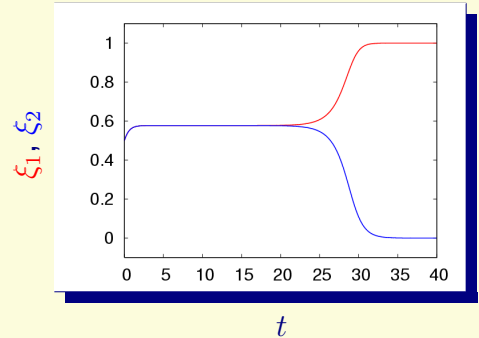
SELBSTORGANISATION

2 Ordnungsparameter

$$\xi_1(0) = 0.582, \xi_2(0) = 0.521$$



$$\|\xi_1(0) - \xi_2(0)\| < 10^{-7}$$



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - ...

Zusammenfassung ...

University of Stuttgart

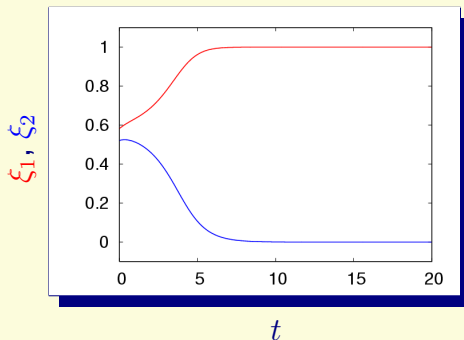
Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

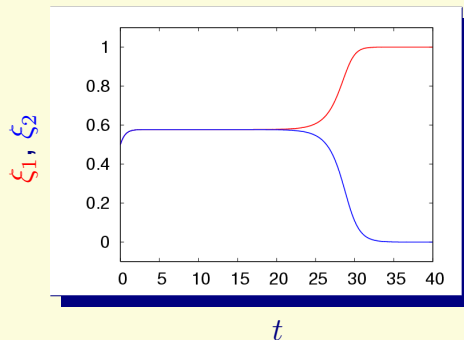
SELBSTORGANISATION

2 Ordnungsparameter

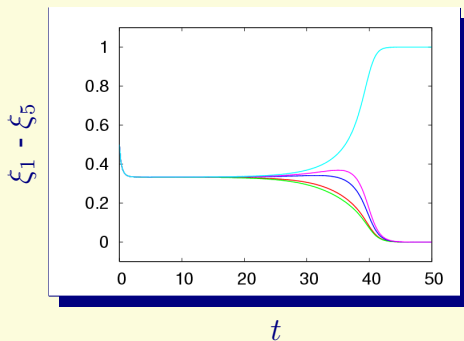
$$\xi_1(0) = 0.582, \xi_2(0) = 0.521$$



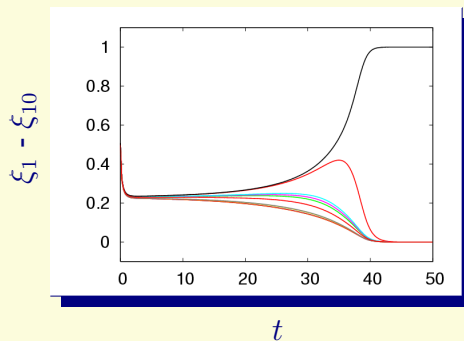
$$\|\xi_1(0) - \xi_2(0)\| < 10^{-7}$$



5 Ordnungsparameter



10 Ordnungsparameter



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - ...

Zusammenfassung ...

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

Motivation

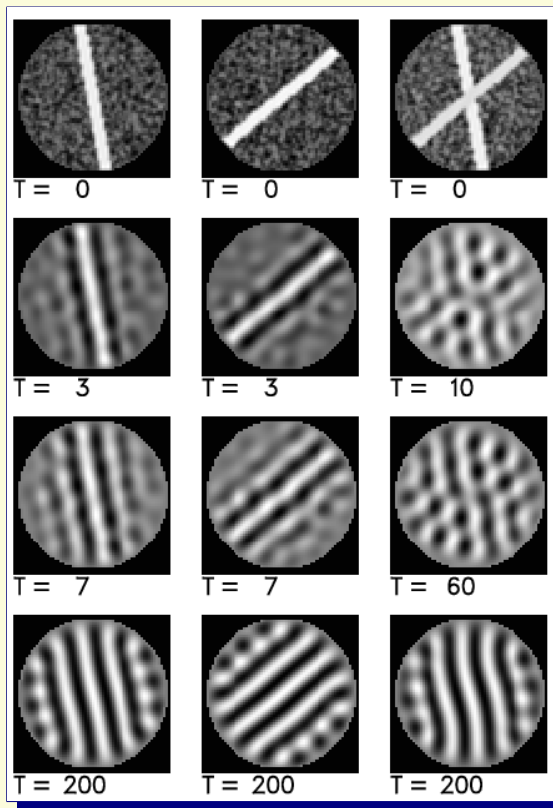
Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - ...

Zusammenfassung ...

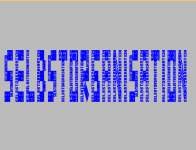




University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

Musterbildung $\Leftrightarrow$ Mustererkennung

Selektionsgleichungen

Musterbildung ist



Musterbildung ist

- ein Prozess, bei dem ein räumlich homogener Zustand instabil wird und einem inhomogenen Zustand, also einem Muster weicht. Meist wird eine solche spontane Symmetriebrechung durch Veränderung eines Parameters in einem nichtlinearen System erzielt.

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

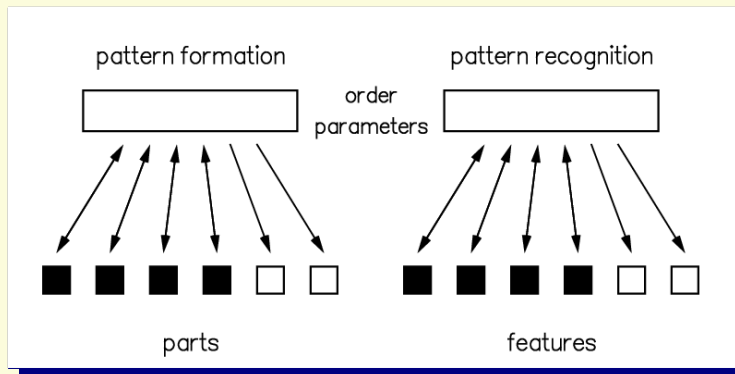
Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .

Musterbildung ist

- ein Prozess, bei dem ein räumlich homogener Zustand instabil wird und einem inhomogenen Zustand, also einem Muster weicht. Meist wird eine solche spontane Symmetriebrechung durch Veränderung eines Parameters in einem nichtlinearen System erzielt.

Analogie zwischen Musterbildung und Mustererkennung





IPVS



University of Stuttgart

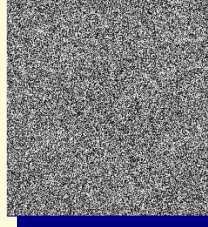
Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELEKTIONSGLEICHUNGEN

Mustererkennung

Selektionsgleichungen



Motivation

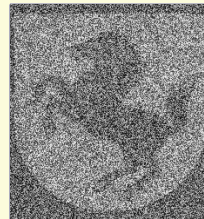
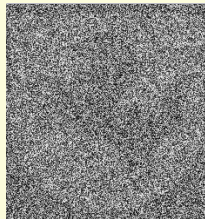
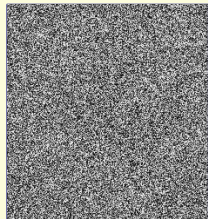
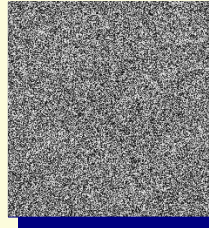
Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .



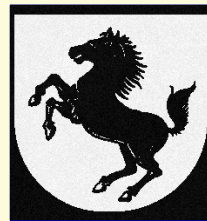
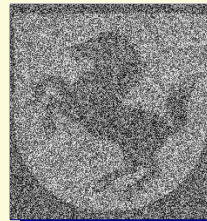
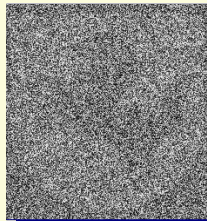
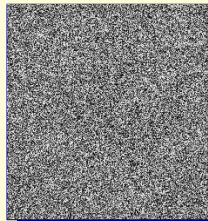
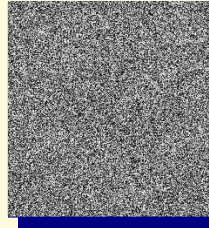
Motivation
Beispiele
Haken-Zwanzig
Selektionsgleichungen
Einfache Regeln - . . .
Zusammenfassung . . .

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELASTORBERNUNG



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

Das folgende konstruierte System von gekoppelten Selektionsgleichungen kann dazu verwendet sogenannte lineare 2-Index Zuordnungsprobleme zu lösen

$$\frac{d}{dt}\xi_{ij} = \xi_{ij} - \xi_{ij}^3 - \beta \cdot \xi_{ij} \sum_{i' \neq i} \xi_{i'j}^2 - \beta \cdot \xi_{ij} \sum_{j' \neq j} \xi_{ij'}^2$$

Definition des 2-Index Zuordnungsproblems:

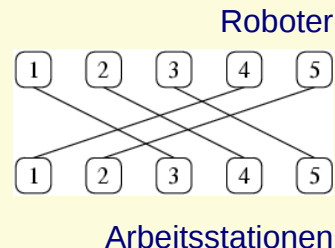
Für gegebene Gewinne $(g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind die BOOLEschen Variablen $x_{ij} \in \{0, 1\}$ mit $i, j \in N := \{1, \dots, n\}$ zu finden, so dass der Gesamtgewinn

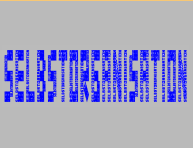
$$g := \sum_{i,j} g_{ij} \cdot x_{ij}$$

maximal ist bezüglich der Restriktionen

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \quad \text{und} \quad \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N$$

$\Rightarrow (x_{ij})$ ist eine Permutationsmatrix





Die Anfangswerte der gekoppelten Selektionsgleichungen entsprechen den Gewinnen:

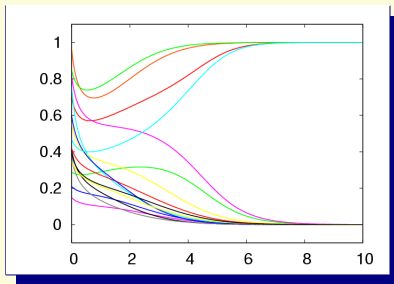
$$\xi_{ij}(t=0) := g_{ij} \quad \forall i, j.$$

Die Lösung des Zuordnungsproblems ist dann gegeben durch die asymptotische Dynamik der gekoppelten Selektionsgleichungen:

$$g_{ij} = \xi_{ij}(t=0) \longrightarrow \xi_{ij}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \xi_{ij}^* = x_{ij}$$

Gewinne

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 70 & 76 & 37 & 82 \\ 29 & 56 & 42 & 47 \\ 21 & 41 & 85 & 35 \\ 15 & 97 & 60 & 39 \end{pmatrix}}_{(g_{ij}) \cdot 100}$$



Zuordnung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(x_{ij})}$$

Beispiel 1

Beispiel 2

University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .

5. Einfache Regeln - Komplexe Strukturen



5. Einfache Regeln - Komplexe Strukturen

1.) Iterierte Funktionensysteme:

Wahrscheinlichkeitsgesteuerte dynamische Systeme

$$\underline{x}_{n+1} = \begin{cases} \underline{f}_1(\underline{x}_n) & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{f}_i(\underline{x}_n) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_i, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{f}_N(\underline{x}_n) & p_N \end{cases}$$

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - ...

Zusammenfassung ...



5. Einfache Regeln - Komplexe Strukturen

1.) Iterierte Funktionensysteme:

Wahrscheinlichkeitsgesteuerte dynamische Systeme

$$\underline{x}_{n+1} = \begin{cases} \underline{f}_1(\underline{x}_n) & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{f}_i(\underline{x}_n) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_i, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{f}_N(\underline{x}_n) & p_N \end{cases}$$

Die $\underline{f}_i$ sind dabei **einfache** kontrahierende affine Abbildungen

$$\underline{f}_i(\underline{x}) = \underline{\underline{M}}_i \underline{x} + \underline{v}_i$$



5. Einfache Regeln - Komplexe Strukturen

1.) Iterierte Funktionensysteme:

Wahrscheinlichkeitsgesteuerte dynamische Systeme

$$\underline{x}_{n+1} = \begin{cases} \underline{f}_1(\underline{x}_n) & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{f}_i(\underline{x}_n) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_i, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{f}_N(\underline{x}_n) & p_N \end{cases}$$

Die $\underline{f}_i$ sind dabei **einfache** kontrahierende affine Abbildungen

$$\underline{f}_i(\underline{x}) = \underline{\underline{M}}_i \underline{x} + \underline{v}_i$$

Barnsley's Farn: $N = 4$ mit $p_1 = 0.85$, $p_2 = 0.07$, $p_3 = 0.07$, $p_4 = 0.01$

$$\underline{\underline{M}}_1 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{M}}_2 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.44 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}_3 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{M}}_4 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.16 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

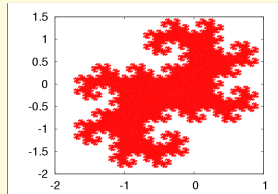
University of Stuttgart

Institute of Parallel and
Distributed Systems

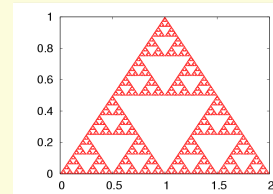
Department of
Image Understanding

SELBSTORGANISATION

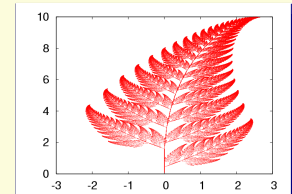
2 Funktionen



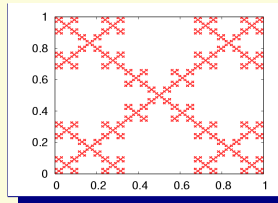
3 Funktionen



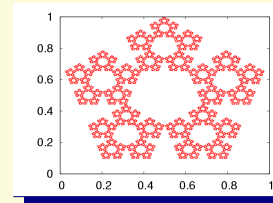
4 Funktionen



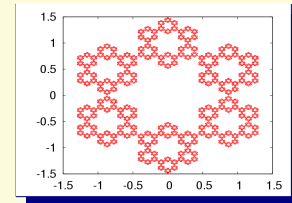
5 Funktionen



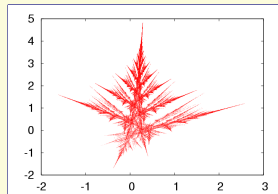
5 Funktionen



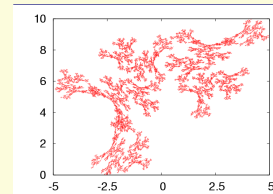
6 Funktionen



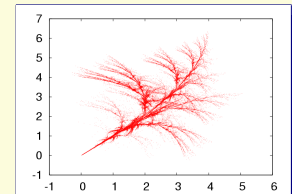
2 Funktionen



3 Funktionen



4 Funktionen



Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - ...

Zusammenfassung ...

SELBSTORGANISATION

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln . . .

Zusammenfassung . . .

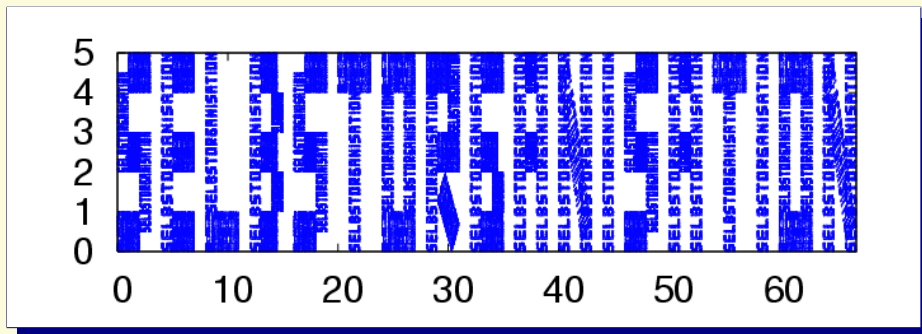
Iterierte Funktionensysteme Einfache Regeln - Komplexe Strukturen

Wieviele Regeln sind notwendig für Selbstorganisation?



Wieviele Regeln sind notwendig für Selbstorganisation?

65 Funktionen



- Motivation
- Beispiele
- Haken-Zwanzig
- Selektionsgleichungen
- Einfache Regeln - ...
- Zusammenfassung ...

University of Stuttgart

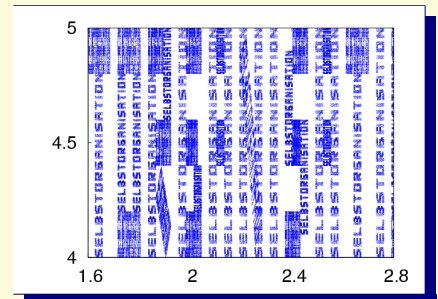
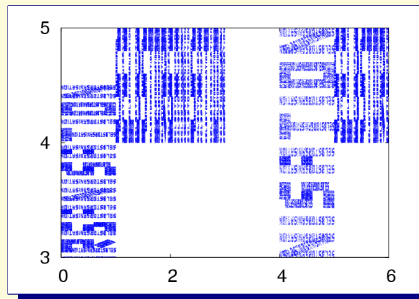
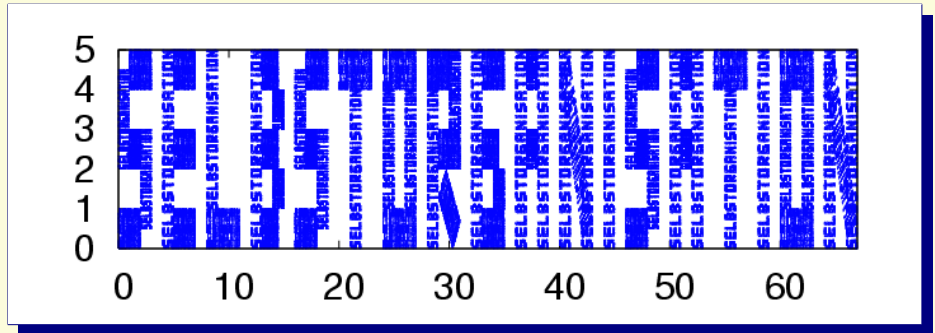
Institute of Parallel and
Distributed Systems

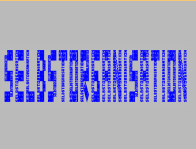
Department of
Image Understanding



Wieviele Regeln sind notwendig für Selbstorganisation?

65 Funktionen





2.) Conway's game of life 2333

ist ein zellulärer Automat, der trotz seiner einfachen Regeln universell ist und die Entstehung sehr komplexer Strukturen ermöglicht

- Struktur der Zellanordnung
 - Dimension: 2
 - Beschränktheit: offen
 - Geometrie: quadratisch
- Nachbarschaft: Moore-Nachbarschaft (8)
- Zahl der Zustände einer Zelle: 2 (tot oder lebendig)
- Regeln
 - **Überleben:** zwei oder drei Nachbarfelder sind besetzt
 - **Geburt:** exakt drei Nachbarfelder sind besetzt

Beispiel



6. Zusammenfassung und Ausblick

Motivation

Beispiele

Haken-Zwanzig

Selektionsgleichungen

Einfache Regeln - . . .

Zusammenfassung . . .



6. Zusammenfassung und Ausblick

6.1. Zusammenfassung

- ▶ Einfache lokale (mikroskopische) Regeln können zur Emergenz komplexer globaler (makroskopischer) Ordnungsstrukturen führen
- ▶ Selbstorganisationsprozesse sind fehlertolerant
- ▶ Es existiert eine mathematische Theorie, die viele Selbstorganisationsphänomene erklären kann



6. Zusammenfassung und Ausblick

6.1. Zusammenfassung

- ▶ Einfache lokale (mikroskopische) Regeln können zur Emergenz komplexer globaler (makroskopischer) Ordnungsstrukturen führen
- ▶ Selbstorganisationsprozesse sind fehlertolerant
- ▶ Es existiert eine mathematische Theorie, die viele Selbstorganisationsphänomene erklären kann

6.2. Ausblick

- ▶ Bislang wenig erforscht sind Selbstorganisationsprozesse mit hierarchischen Strukturen
- ▶ Es fehlt bis heute eine Systematik zur Herleitung von Regeln, die zu gewünschten Selbstorganisationsprozessen führen